数理解析研究所講究録
150巻 1972年 90-114

測度に関係ある集合論の結果

名大 教養　　難波完爾

§1. ZF集合論の公理系.

次のような記号を用いる：$\forall$ (for all), $\vee$ (or), $\wedge$ (and), $\to$ (ならば), $\neg$ (not), $\subset$ ($\forall x\,[x \in a \to x \in b]$ を $a \subset b$ と書く), $\in$ (属する).

次の①－⑨をZF(Zermelo-Fraenkel)の公理系という。

① $a \subset b \wedge b \subset a \to a = b$

② $\exists \cup a\, \forall x\,[x \in \cup a \equiv \exists y \in a\,[x \in y]]$ (和集合の存在)

③ $\forall a\, \exists \mathcal{P}(a)\, \forall x\,[x \in \mathcal{P}(a) \equiv \forall y \in x\,[y \in a]]$ (巾集合の存在)

④ $\forall a\, \forall b\, \exists \{a, b\}\, \forall x\,[x \in \{a, b\} \equiv x = a \vee x = b]$ (集合 $\{a, b\}$ の存在)

⑤ $\exists \phi\, \forall x\,[\neg x \in \phi]$ (空集合の存在)

⑥ $\exists x\,[0 \in x \wedge \forall y \in x\,[y + 1 \in x]]$ (但し 0 は

中，$y+1$ は $y \cup \{y\}$ を意味する。~~[illegible]~~自然数の全体が集合であること。

⑦ $\forall a \, \exists \{x \in a \mid A(x)\}$ （部分集合の存在）

⑧ $\forall x \, [\forall y \in x, \, A(y) \rightarrow A(x)] \rightarrow \forall x \, A(x)$. （帰納法）

⑨ $\forall x \in a \;\; \exists y \, A(x, y) \equiv \exists b \, \exists x \in a \;\; \exists y \in b \;\; A(x, y)$
（置換の公理。集合と一対一に対応した相手の全体は集合である）

次に選択公理（AC）を与える：

⑩ $\forall x \in a \;\; \exists y \, A(x, y) \equiv \exists f \, \forall x \in a \;\; A(x, f(x))$
（$\forall$ と $\exists$ の入れかえだから，分配律ともいえる。なお f は "関数" であって，次のように考える。
　先ず，順序対 $\langle a, b \rangle = \{\{a, a\}, \{a, b\}\}$ と定義する。そして次の (イ) (ロ) をみたす集合 f を，関数と呼ぶ：(イ) $x \in f \rightarrow x$ は順序対。(ロ) $\langle x, y \rangle \in f \wedge \langle x, z \rangle \in f \rightarrow y = z$。

§2. Measurable cardinal

A を任意の集合とする。$\wp(A)$ から $[0, \infty)$ への measure の存在を問題にする。

[定義] measure μ が trivial であるとは

$$\mu(A) = 0 \lor {}^{\exists}p \in A \ \ \mu(\{p\}) > 0 \text{。}$$

なることをいう。従って μ が non-trivial であるとは

$$\mu(A) > 0 \land {}^{\forall}p \in A \ \ \mu(\{p\}) = 0 \text{。}$$

[問題] $\mathcal{P}(A)$ 上に non-trivial measure は存在するか？

答は $\overline{\overline{A}}$ によってきまる。答が YES !! であるような cardinal を "measurable cardinal" と呼ぶ。ある cardinal が measurable なら，それより大きい cardinal はすべて measurable である。

A の上の non-trivial measure μ に対して，"additive number"（add(μ)）を定義する。

[定義] add(μ) =

$$= \sup\{\alpha \mid {}^{\forall}f : \alpha \to \mathcal{P}(A) \ [{}^{\forall}\nu < \alpha \ [\mu(f(\nu)) = 0]] \Rightarrow \mu(\bigcup_{\nu<\alpha} f(\nu)) = 0\}$$

$$= \min\{\alpha \mid {}^{\exists}f : \alpha \to \mathcal{P}(A) [{}^{\forall}\nu < \alpha [\mu(f(\nu)) = 0]] \land \mu(\bigcup_{\nu<\alpha} f(\nu)) > 0\} \text{。}$$

$\overline{\overline{A}}$ は上の第一の { } 内の α の性質はもたない。∴ add(μ) $\leq \overline{\overline{A}}$。また $\omega <$ add(μ) は明か。

[定義] 順序数 α の cofinality cf(α) とは，${}^{\exists}f : \beta \to \alpha \ [\sup_{\nu<\beta} f(\nu) = \alpha]$ なる順序数 β のうち，最小のものをいう。（なお $\sup_{x<\beta} f(x) = \bigcup\{f(x) ; x < \beta\}$。）

［定義］ 順序数αがweakly inaccessibleであるとは

$\alpha = \aleph_\alpha$ で，かつ $cf(\alpha) = \alpha$

であることをいう。

［定義］ Aから順序数全体（Ordと書く）への関数fがB（$B \subset A$, $\mu(B) > 0$）上でincompressibleであるとは，次の①，② をみたすことをいう。

① $^\forall g : A \to Ord$ に対して

$\mu(\{v \in B \mid g(v) < f(v)\}) > 0 \Rightarrow {}^\exists\beta < add(\mu)\ \mu(\{v \in B ; g(v) = \beta\}) > 0$

② $^\forall\beta < add(\mu)$ に対し $\mu(\{v \in B \mid f(v) = \beta\}) = 0$.

fがA上でincompressibleであるとき，単に"fはincompressible"という。

$\boxed{\text{［定理］ } add(\mu) \text{ は weakly inaccessible}}$

この定理のために，4つのlemmaが必要である。

［Lem. 1］ incompressible function が存在する。

［証明］ i) 次の①②③の性質をもつ$\langle f, B\rangle$の集りをCと書く。たゞし $f : B \to Ord$, $B \subset A$ とする。

① $\langle f, B\rangle \in C \to \mu(B) > 0$。

② $\langle f, B\rangle \in C \to$ fはB上でincompressible

③ $\langle f_1, B_1\rangle, \langle f_2, B_2\rangle \in C$, $\langle f_1, B_1\rangle \neq \langle f_2, B_2\rangle$

$\to B_1 \cap B_2 = \phi$.

①③ のBの性質より，明かに $\overline{\overline{C}} \leq \omega$ である。次に

$\mathcal{C} = ($①②③ をみたす C の全体$)$ とおくと、$\mathcal{C} \ni \phi$ であるから、$\mathcal{C} \neq \phi$ である。

$\mathcal{C} \ni C_1, C_2$ に対し $C_1 \subseteq C_2$ の関係で順序を入れる。($\mathcal{C}, \leq$) 中の任意の増加列に対して、$\bigcup$ がまた①②③をみたす。ゆえに $\mathcal{C}$ は極大元 C^* をもつ（Zorn）。$D = A - \bigcup_{\langle f, B\rangle \in C^*} B$ とおく。

ii) $\mu(D) = 0$ である。

（証明）$\mu(D) > 0$ と仮定する。次のように $f_0 : D \longrightarrow$ Ord. を定義する：$f_0(d) = add(\mu)$ $d \in D$。

これは次の性質 (a) をもつ：

(a) $\forall \beta < add(\mu) [\mu(\{v \in D \mid f_0(v) = \beta\}) = 0]$

一般に、性質 (a) をもつ関数 f に対して、次の性質 $\boxed{1}$ − $\boxed{4}$ をもつ $\langle g, E \rangle$ の集合を $\mathfrak{D}$ と書く。

$\boxed{1}$ $\langle g, E \rangle \in \mathfrak{D} \longrightarrow \mu(E) \geq 0,\ E \subset D$。

$\boxed{2}$ $\langle g, E \rangle \in \mathfrak{D} \longrightarrow \forall v \in E\ [g(v) < f(v)]$

$\boxed{3}$ $\langle g, E \rangle \in \mathfrak{D} \longrightarrow \forall \beta < add(\mu)\ [\mu(\{v \in E \mid g(v) = \beta\}) = 0]$

$\boxed{4}$ $\langle g_1, E_1 \rangle \neq \langle g_2, E_2 \rangle$（ともに $\mathfrak{D}$ に属するとする）$\longrightarrow E_1 \cap E_2 = \phi$。

そして、性質 $\boxed{1}$ − $\boxed{4}$ をもつ $\mathfrak{D}$ の全体を $\mathfrak{D}_f$ と書く。

$\mathfrak{D}_f = \{\mathfrak{D}\ ;\ \boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\}$

このとき $\mathcal{D}_f \neq \phi$ であり，また $(\mathcal{D}_f, \subseteq)$ は $(\mathcal{C}, \subseteq)$ と同様に極大元 $\mathcal{D}^*$ をもつ。そして $\bigcup_{\langle g,E\rangle \in \mathcal{D}^*} E \subset D$ となるが，実は

$\circledast$ $\mu(D - \bigcup_{\langle g,E\rangle \in \mathcal{D}^*} E) = 0$ である。

($\circledast$の証明．(注意。これは $\mu(D)=0$ の証明途中の一挿話))
$F = \left(D - \bigcup_{\langle g,E\rangle \in \mathcal{D}^*} E\right)$ とおく。もしも $\mu(F) > 0$ であれば，f は F 上で incompressible となる。((そうでないとすると $\exists g\ \exists E'$ $\mu(E') > 0$, $E' \subset F$, $\forall v \in E'\,[g(v) < f(v)]$ $\forall \beta < add(\mu)$ $\mu(\{v \in E', g(v) = \beta\}) = 0$。したがって $\{\langle g, E'\rangle\} \cup \mathcal{D}^* \in \mathcal{D}_f$ となり，$\mathcal{D}^*$の極大性に反するからである。)) そこで $\{\langle f, F\rangle\} \cup \mathcal{C}^* \in \mathcal{C}$ となり，これは $\mathcal{C}^*$の極大性に反する。($\circledast$の証明終り)

今度は $g^*(v)$ を次のように定義する：

$$g^*(v) = \begin{cases} g(v) & \langle g, E\rangle \in \mathcal{D}^*,\ v \in E。\\ 0 & v \notin D - F \text{ のとき。} \end{cases}$$

すると $\mu(\{v \mid g^*(v) < f(v)\}) = \mu(D)$．ゆえに $\forall \beta < add(\mu)\ [\mu(\{v \in D \mid g^*(v) = \beta\}) = 0]$。これは g^* が性質(a)をもつということである。前頁中頃から行ってきたことは，次のようにまとめられる：

(a)をみたす f から出発し，$f \to \mathcal{D}_f \to \mathcal{D}^* \longrightarrow g^*$ と進み，再び(a)をみたす g^* を得る。

そこで，先ず前々頁の f_0 を f として取り，得られる g^* を f_1 と名づける。次に f_1 を f とし，同じ手順で f_2 を作る。これを繰返して進むと，$f_0 \to f_1 \to f_2 \to \cdots\cdots$ という列ができ，

$$\mu(D - \{\nu \mid f_{n+1}(\nu) < f_n(\nu)\}) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

となる。ゆえに

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\omega} \{\nu \mid f_{n+1}(\nu) < f_n(\nu)\}\right) = \mu(D) > 0$$

となるから，

$$\exists \gamma_0 \in \bigcap_{n\in\omega} \{\nu \mid f_{n+1}(\nu) < f_n(\nu)\}$$

この γ_0 に対しては

$$f_0(\gamma_0) > f_1(\gamma_0) > f_2(\gamma_0) > \cdots\cdots \text{。}$$

これは順序数の無限下降列であるが，こういうものはあり得ない（整列可能定理）。よって $\mu(D) = 0$。

iii) $$f^\#(\nu) = \begin{cases} f(\nu) & \langle f, B\rangle \in C^*,\ \nu \in B. \\ 0 & \nu \in A - \bigcup_{\langle f,B\rangle \in C^*} B \end{cases}$$

［Lem. 2］ $\mathrm{add}(\mu)$ は regular cardinal.
すなわち $\rho^* = \mathrm{add}(\mu)$ とおくと，$\mathrm{cf}(\rho^*) = \rho^*$。
かつ ρ^* は cardinal。

［証明］ i) $(\mathrm{cf}(\rho^*) = \rho^*)$。これが成立たないとすれば $\exists \beta < \rho^*\ \exists f : \beta \to \rho^*\ \sup_{\nu<\beta} f(\nu) = \rho^*$ となる。一方 ρ^* は $\mathrm{add}(\mu)$ なのだから，ある $\{A_\nu ;\ \nu < \rho^*\}$ に

対して $\forall \nu < \rho^* [\mu(A_\nu) = 0] \wedge \mu(\bigcup_{\nu<\rho^*} A_\nu) > 0$ となる。$\bigcup_{\nu<\rho^*} A_\nu = \bigcup_{\nu<\beta} \bigcup_{\lambda \leq f(\nu)} A_\lambda$ であるが，$\rho^* > f(\nu)$ から

$$\mu(\bigcup_{\lambda \leq f(\nu)} A_\lambda) = 0 \quad (\forall \nu < \beta)。$$

しかるに $\beta < \rho^*$ だから

$$\mu(\bigcup_{\nu<\beta} \bigcup_{\lambda \leq f(\nu)} A_\lambda) = 0$$

これは矛盾である。

ii) (ρ^* は cardinal) $\rho < \rho^*$ とすると，$\rho^* = \mathrm{add}(\mu)$ から，

$$\forall \{A_\nu ; \nu < \rho\} \left[\forall \nu < \rho [\mu(A_\nu) = 0] \Rightarrow \mu(\bigcup_{\nu<\rho} A_\nu) = 0\right]$$

$$\exists \{A_\nu ; \nu < \rho^*\} \left[\forall \nu < \rho^* [\mu(A_\nu) = 0] \wedge \mu(\bigcup_{\nu<\rho^*} A_\nu) > 0\right]$$

よって ρ と ρ^* の濃度は等しくない。$\forall \rho < \rho^*$ に対して濃度が等しくないのだから，ρ^* は cardinal である。

(regular ordinal は cardinal である。このことはよく知られている) (Lem. 2 終り)

$\rho^* = \mathrm{add}(\mu)$ とし，$\forall \nu < \rho^* [\mu(A_\nu) = 0]$，$\mu(\bigcup_{\nu<\rho^*} A_\nu) > 0$ とする。$A^* = \bigcup_{\nu<\rho^*} A_\nu$ とおく。次のように $f : A^* \to \rho^*$ を定義する：

$f(a) =$ $a \in A_\nu$ なる最小の ν。

また，$\mu' = (\mu$ を $\mathcal{P}(A^*)$ に restrict したもの$)$ とする。

すると明かに　$add(\mu') = add(\mu)$。そして f は，

(b)　$\forall \beta < add(\mu')\ [\mu'(\{\nu \in A^* \mid f(\nu) = \beta\}) = 0]$

という性質をもつ。（$\because$ $\{\ \} = A_\beta - \bigcup_{\lambda<\beta} A_\lambda$。しかるに $\mu(A_\beta) = 0$）。

$f^\#$ を incompressible function とすると

$$\mu'(\{\nu \in A^* \mid f^\#(\nu) \leq f(\nu)\}) = \mu'(A^*)$$

（$\because$ 非とすると　$\mu'\{\nu \in A^* \mid f(\nu) < f^\#(\nu)\} > 0$　となる。ゆえに $f^\#$ の incompressibility から

$$^\exists\beta < add(\mu')\quad \mu'\{\nu \in A^*,\ f(\nu) = \beta\} > 0。$$

これは (b) と矛盾する。）

$$\therefore\quad f^\#(\nu) < add(\mu')\ (\mu'\text{-a.e なる } \nu \in A^*)。$$

［Lem. 3］ μ'-a.e. なる ν に対して，$f^\#(\nu)$ は cardinal number である。

［証明］ 反対に　$\mu(\{\nu\ ;\ g(\nu) = \overline{\overline{f^\#(\nu)}} < f^\#(\nu)\}) > 0$　と仮定する。$f^\#$ は incompressible だから，

$$^\exists\beta < add(\mu')\quad \mu(\{\nu \mid \overline{\overline{f^\#(\nu)}} = \beta\}) > 0。$$

ゆえに

(c)　$\mu(\{\nu \mid f^\#(\nu) < \overline{\overline{\beta}}^+\}) > 0$。

（但し $\overline{\overline{\beta}}^+$ とは，$\overline{\overline{\beta}}$ より大きな cardinal のうち，最小のものとする。）しかるに　$add(\mu')$ は limit cardinal だから，$\overline{\overline{\beta}}^{+} < add(\mu')$

add (μ) の定義と (c) とから，$\mu(\{\nu \mid f^{\#}(\nu) = \delta\}) > 0$ となる δ ($< \overline{\overline{\beta}}^{+}$) が存在する。これは $f^{\#}$ が incompressible であることに反する。

[Lem 4] $add(\mu') = \aleph_{\alpha+1}$ なる α は存在しない。

[証明] $add(\mu') = \aleph_{\alpha+1}$ と仮定する。

$f^{\#}(\nu)$ は A^* 上殆ど至る所 limit cardinal である。

《∵ $\exists B \subset A^*$，$\mu(B) > 0$ $\forall \nu \in B\, [f^{\#}(\nu) = g(\nu) + 1]$ となったとすると $\mu(\{\nu ; g(\nu) < f^{\#}(\nu)\}) > 0$。
$f^{\#}$ の incompressibility から

$\exists \beta < add(\mu)$ $\mu(\{\nu \in B \mid g(\nu) = \beta\}) > 0$。

このとき

(d) $\mu(\{\nu \in B \mid f^{\#}(\nu) = \beta + 1\}) > 0$.

しかるに ρ^* は limit cardinal だから $\beta + 1 < \rho^*$.
ゆえに (d) は $f^{\#}$ の incompressibility に反する。》

[redacted] $f^{\#}(\nu) < add(\mu')$ (a.e.) (ここの所，a.e. とは μ' に関して殆どすべての $\nu \in A^*$ につい

(注意 Lem.3 の証明に Lem.4 を用いているが，Lem.4 の証明には Lem.3 を用いていない)

:

てという意味である）。一方，$f^\#(\nu)$ は a.a.-ν に対して cardinal であるから，

$$f^\#(\nu) \le \aleph_\alpha \quad (a.e.)。$$

よって $cf(f^\#(\nu)) \le f^\#(\nu) \le \aleph_\alpha$ (a.e.)

∴ a.e.-ν に対して

$\exists f_\nu : \aleph_\alpha \to f^\#(\nu)$; $\sup_{\lambda<\aleph_\alpha} f_\nu(\lambda) = f^\#(\nu)$.

いま $\beta < \aleph_\alpha$ を固定する。$h_\beta(\nu)$ を，

$$h_\beta(\nu) = f_\nu(\beta)$$

で定義すると

$$h_\beta(\nu) < f^\#(\nu) \quad (a.e.)$$

また $D_\beta = \{\gamma \mid \mu(\{\nu \mid h_\beta(\nu) = \gamma\}) > 0\}$ とおくと $f^\#$ の incompressibility から $D_\beta = \phi$。$\overline{\overline{D_\beta}} \le \omega$ は明かだから $\overline{\overline{\bigcup_{\beta<\aleph_\alpha} D_\beta}} \le \aleph_\alpha$。

また，$\bigcup_{\beta<\aleph_\alpha} D_\beta \subset add(\mu')$ （∵ D_β の元 $< add(\mu)$）しかも $add(\mu')$ は regular。ゆえに

$\exists \kappa < add(\mu')$ $\bigcup_{\beta<\aleph_\alpha} D_\beta \subset \kappa = \{\nu \mid \nu < \kappa\}$

$\kappa < f^\#(\nu)$ (a.e.)。

しかるに $\sup_{\lambda<\aleph_\alpha} f_\nu(\lambda) = f^\#(\nu)$ だから，$\sup_{\lambda<\aleph_\alpha} f_\nu(\lambda) > \kappa$ (a.e.)。しかも $f^\#(\nu) =$ limit ordinal (a.e.)。

∴ a.e.-ν に対して $\exists t(\nu)$;

$$\kappa < f_\nu(t(\nu)) , \quad t(\nu) < \aleph_\alpha \quad (\text{a.e.}).$$

$f^\#$ が incompressible だから，

$$\exists\delta < \aleph_\alpha \quad \mu(\{\nu \mid t(\nu) = \delta\}) > 0 。$$

$E = \{\nu \mid t(\nu) = \delta\}$ とおけば，E上では

$$\kappa < f_\nu(\delta) = h_\delta(\nu) < f^\#(\nu) \quad (\text{a.e.}).$$

従って ~~…~~ $\exists\eta$; $\kappa < \eta < \mathrm{add}(\mu)$;

$$\mu(\{\nu \mid h_\delta(\nu) = \eta\}) > 0 。$$

この η は一方では

$$\eta \in D_\delta \subset \bigcup_{\beta < \aleph_\alpha} D_\beta \subset \kappa$$

となるから，矛盾である。(Lem 4. 終り。)

(以下は定理の証明)

Lem. 3 により，$g : A^* \to \mathrm{Ord}$ が存在して

$$f^\#(\nu) = \aleph_{g(\nu)} \qquad (\text{a.e.})$$

と書ける。この $f^\#$ と g とについて

$$\mu(\{\nu \mid g(\nu) < f^\#(\nu)\}) = 0$$

(① > 0 とすると，$f^\#$ の incompressibility より

$$\exists\beta < \mathrm{add}(\mu') \quad \mu(\{\nu \mid g(\nu) = \beta\}) > 0 。$$

この β に対して $\mu(\{\nu \mid \aleph_\beta = f^\#(\nu)\}) > 0$ である。

しかるに $f^\#(\nu) < \mathrm{add}(\mu)$ (a.e.) から，

$$\aleph_\beta < \mathrm{add}(\mu)$$

でなければならず，このことは $f^{\#}$ の incompressibility に反する。）

$$\therefore \quad g(\nu) \geq f^{\#}(\nu) \qquad (a.e.)$$

$$\therefore \quad f^{\#}(\nu) = \aleph_{f^{\#}(\nu)} \qquad (a.e.)$$

ゆえに $cf(f^{\#}(\nu)) = f^{\#}(\nu) \quad (a.e.)$

（$\because$ $\mu(\{\nu \mid cf(f^{\#}(\nu)) < f^{\#}(\nu)\}) > 0$ と仮定すると，

$\exists \beta < add(\mu) \quad \mu(\{\nu \mid cf(f^{\#}(\nu)) = \beta\}) > 0$。

以下 Lem 4 において，$add(\mu) = \aleph_{\alpha+1}$ として矛盾を導いたのと同様にして（$\aleph_\alpha$ のかわりに β を用いて），矛盾に到達する。）

いま，$\rho^* = \aleph_{\rho'}$ とおく。$\rho' < \rho^*$ と仮定すると

$$\rho' < f^{\#}(\nu) \qquad (a.e.)$$

$$\therefore \quad \aleph_{\rho'} = \rho^* < \aleph_{f^{\#}(\nu)} < \rho^* \qquad (a.e.)$$

これは矛盾であるから $\rho' \geq \rho^*$。ゆえに $\rho^* = \aleph_{\rho^*}$。

以上により $\rho^* = \aleph_{\rho^*}$，また Lem. 2 より $cf(\rho^*) = \rho^*$。

ゆえに $\rho^* = add(\mu)$ は weakly inaccessible。

（定理 の証明終）。

［注意］① ρ^* は $\aleph_\omega$ ではない（$\because$ $\omega = \aleph_0$ $\therefore \omega \neq \aleph_\omega$ しかるに $\rho^* = \aleph_{\rho^*}$）。また $\aleph_{\aleph_1}$ でもない（$\aleph_{\aleph_1}$

キ$\aleph_1$ である）。それでは ① $\lambda=\aleph_\lambda$ ② λ: regular となるような最初のλは何か？ これについては次のことが知られている：

「λ: weakly inaccessible $\equiv$ $\mathrm{Reg}(\lambda) \wedge (\lambda=\aleph_\lambda)$」

なお $\lambda=\aleph_\lambda$ ならば，λは limit ordinal であることに注意せよ。

㋺ Cons ((ZF + AC), $\nexists\lambda$ (weakly inaccessible)) は示されている。

Cons ((ZF + AC), $\exists\lambda$ (weakly inaccessible)) は証明できない（その証明と，ZF内でのZFの無矛盾性の証明とが同値である，ということが示されている）。

［定義］ κ を順序数とする。μを κ上の non-trivial measure とする。μが normal measur であるとは，id (identity) : $\kappa \longrightarrow \kappa$ が incompressible であることをいう。

［定理］ $\mathcal{P}(A) \to [0, \infty)$ の non-trivial measure が存在すれば，normal measure が存在する。すなわち A: measurable $\Rightarrow$ add(μ): measurable.

［証明］ non-trivial measure をμとする。

Lem. 1 の証明の途中にあるように，$^\exists A' \subset A$,

$^\exists \mu' : \wp(A') \to [0, \infty)$, $^\exists f^\#$ (incompressible);

$$\mu'(\{v \in A' \mid f^\#(v) < \mathrm{add}(\mu')\}) = \mu(A') > 0。$$

いま $\kappa = \mathrm{add}(\mu')$ とおき，$a (\subset \kappa)$ に対し

$$\mu^*(a) = \mu'(\{v \in A \mid f^\#(v) \in a\})$$

と定義する。この μ^* は measure で，

$$\mu^*(\kappa) = \mu'(A') > 0, \quad \mathrm{add}(\mu^*) = \mathrm{add}(\mu') = \kappa。$$

以下，μ^* の normality を示す。

① $^\forall \beta < \mathrm{add}(\mu^*)$ $\mu^*(\{v \in \kappa ; \mathrm{id}(v) = \beta\}) =$ $\mu^*(\{\beta\}) = 0$。

② $\mu^*(\{v \in \kappa \mid g(v) < v\}) > 0$ と仮定すると，この左辺$=$ $\mu'(\{v \in A' \mid g(f^\#(v)) < f^\#(v)\}) > 0$。$f^\#$は incompressible だから $^\exists \beta < \kappa$;

$$\mu'(\{v \in A \mid g(f^\#(v)) = \beta\}) > 0$$
$$\parallel \ \mu^*(\{v \in \kappa \mid g(v) = \beta\})$$

①② より identity が incompressible。

［定義］ $\mu : \wp(A) \to [0, \infty)$ なる measure とする。μが non-atomic であるとは

$^\forall B \subset A \, [\mu(B) > 0 \Rightarrow {}^\exists C \subset B \, [\mu(C) > 0 \wedge \mu(B-C) > 0]$

であることをいう。

〔定理〕（Ulam 1930）

$\mathcal{P}(A)$ 上に non-atomic measure μ が存在するならば，$\mathrm{add}(\mu) \leqq 2^{\omega}$。

〔証明〕 $f : \mathrm{Ord} \to \{0, 1\}$ に対して，次のように帰納的に A_f を定義する。

① $A_\phi = A$（ϕ とは定義域が空集合である f）。

② $\mathrm{dom}(f) < \alpha$ なる f に対しては，すべて A_f が定義されているものとする。

2-1 $\alpha = \beta + 1$ の形のとき

$\mathrm{dom}(f) = \beta$ なる f に対しては A_f は定義されている。

2-1-1 $\mu(A_f) = 0$ のとき $A_{f*0} = A_f$，$A_{f*1} = \phi$ と定義する。たゞし $f*0$ とは，β までは f に等しく，$\beta+1$ に対する値が 0 である関数。

2-1-2 $\mu(A_f) > 0$ のとき，$\mu(C) > 0$，$\mu(A_f - C) > 0$ なる C を取つて $A_{f*0} = C$，$A_{f*1} = A_f - C$ と定義する。

2-2 α が limit ordinal のとき。

$\mathrm{dom}(f) = \alpha$ なる f に対し，$f|_\beta$（f の β への制約）を，$\beta < \alpha$ なるすべての β について作る。そして

$$A_f = \bigcap_{\beta<\alpha} A_{f|_\beta}$$

と定義する。

（定義終）。

$\mathcal{C} = \{ f \mid \mu(A_f) > 0 \}$ とおくと

$$f \in \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{dom}(f) < \omega_1 = \aleph_1$$

(∵ $\geq \omega_1$ とすると, $\forall \alpha < \omega_1 \ \mu(A_{f|_\alpha}) > 0$ となる。A_f の作り方から $\mu(A_{f|_\alpha} - A_{f|_{\alpha+1}}) > 0$。∴ $\{ A_{f|_\alpha} - A_{f|_{\alpha+1}} ; \alpha < \omega_1 \}$ は, positive measure をもった disjoint set の族。このことはμの有界性に反する。)

すべての順序数 β に対して $A = \bigcup_{f:\beta \to \{0,1\}} A_f$。
(∵ $\bigcup$ は $\mathrm{dom}(f) = \beta$ なる f 全部にわたる。だから A_f 全体で A を覆う。以下 $\{0, 1\} = 2$ と記す。)

ゆえに

$$A = \bigcap_{\beta < \omega_1} \bigcup_{f:\beta \to 2} A_f$$

$$= \bigcup_{\substack{\mathrm{dom}(t) = \omega_1 \\ t(\beta) : \beta \to 2}} \bigcap_{\beta < \omega_1} A_{t(\beta)} \qquad (\mathrm{AC})$$

ここで任意の $t : \omega_1 \to 2$ に対して

$$S = \{ t|_\beta \ ; \ \beta < \omega_1 \ \ \mu(A_{t|_\beta}) > 0 \}$$

とすると, S は可算である。(∵ 非可算なら $\forall \beta < \omega_1$ $\exists \beta^* > \beta$ $\mu(A_{t|\beta^*}) > 0$。∴ $\mu(A_{t|_\beta}) > 0$。∴ $\forall \beta < \omega_1$; $\mu(A_{t|_\beta}) > 0$。これは矛盾である。) よって

$$\exists g : 2^{\omega_1} \longrightarrow \mathrm{Ord} ; [g(t) \leq \beta < \omega_1 \Rightarrow \mu(A_{t|_\beta}) = 0.$$

しかるに $A_{t|_{g(t)}} = \bigcap_{\beta < g(t)} A_{t|_\beta}$ だから $\mu(A_{t|_{g(t)}}) = 0$。

(e) $$\therefore \mu\left(\bigcap_{\beta < g(t)} A_{t|_\beta}\right) = 0$$

次に $E = \{ t \mid \exists \beta < \omega_1 [t : \beta \to 2] \}$

$= \bigcup_{\beta<\omega_1} \{ t \mid t : \beta \to 2 \}$ とおく。すると，

$\overline{\overline{E}} \leqq \omega_1 \cdot 2^\omega = 2^\omega$。

$\therefore \quad 0 < \mu(A) = \mu(\bigcup_{t:\omega_1\to 2} \bigcap_{\beta<\omega_1} A_{t|\beta})$

$\leqq \mu(\bigcup_{t:\omega_1\to 2} \bigcap_{\beta<g(t)} A_{t|\beta})$

$\leqq \mu(\bigcup_{t\in E} \bigcap_{\beta<g(t)} A_{t|\beta})$。

もしも $add(\mu) > 2^\omega$ なら，(e) によりこの右辺が 0 でなければならないから，$add(\mu) \leqq 2^\omega$ である。

［注意］ ㋑ μ が non-atomic なら $add(\mu) \leqq 2^\omega$ であることは上述の通りであるが，

㋺ μ が non-non-atomic なら，atom A' をもつ。このとき $\mu^*(B) = \mu(B)/\mu(A')$ （$B \subset A'$）と定義することにより，$\mathcal{P}(A')$ 上に 2-valued measure μ^* が作れる。もちろん $\mathcal{P}(A)$ 上に拡大できる。

㋩ μ が purely atomic のときは

$\forall \gamma < add(\mu) \; [2^\gamma < add(\mu)]$

が成立つ。（ゆえに $\omega < add(\mu)$ だから，$2^\omega < add(\mu)$ である。

㊁ Cons (ZF + AC + non-atomic-measurable cardinal の存在) $\Leftrightarrow$ Cons (ZF + AC + purely-atomic-measurable-cardinal の存在) $\Rightarrow$ Cons (ZF + AC + purely-atomic-measurable-cardinal の存在 + GCH)

ホ (ZF + AC + CH + non-atomic-measurable-cardinal の存在) は矛盾に導く。

ヘ Cons (ZF + AC + 2-valued-measurable-cardinal の存在) $\Rightarrow$ Cons (ZF + AC + real-valued-measurable-cardinal の存在)。

§3. Rectangle problem.

X, Y を空間とし, $A \subset X$, $B \subset Y$ とするとき

$$A \times B = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B \}$$

$$\mathcal{S}[X, Y] = \{ A \times B \mid A \subset X \wedge B \subset Y \}$$

$$\mathcal{B}[X, Y] = (\mathcal{S}[A, B])^{\sigma}$$

$$\mathcal{P}[X, Y] = X \times Y \text{ の巾集合}$$

と定義する。

[問題] $\mathcal{P}[X, Y] = \mathcal{B}[X, Y]$ であるか?

"$\mathcal{P}[X, X] = \mathcal{B}[X, X]$" を $\mathrm{P}(X)$ と書く。

[定理 1] $\mathrm{P}(\aleph_0)$ (これは全く明か)

[定理2]　$\overline{\overline{X}} > 2^{\aleph_0} \Rightarrow \neg\mathfrak{P}(X)$

[証明]　$D = \{\langle x, x\rangle \mid x \in X\} \subset X \times X$ とする。これが $\mathcal{B}[X, X]$ に入らないことを証明する。

かりに $D \in \mathcal{B}[X, X]$ とすると、D は $\mathcal{S}[X, X]$ の中の可算個の集合によって生成される σ- algebra に属する。この可算個の集合を、一般性を失わずに

$$\{A_i \times A_j \mid i, j = 1, 2, \cdots\cdots\}$$

(但し $A_i \subset X$, $i = 1, 2, \cdots\cdots$), という形のものとする。

仮定 $\overline{\overline{X}} > 2^{\aleph_0}$ から、$\exists x \neq \exists y$; $x \in X$, $y \in Y$, $\forall i$ $x \in A_i \leftrightarrow y \in A_i$。すると $(x, x) \in D$, $(x, y) \notin D$。しかも $\forall i \forall j$ $(x, x) \in (A_i \times A_j) \Leftrightarrow (x, y) \in (A_i \times A_j)$。これでは $(x, y) \in D$ となって矛盾である。

∎

[定理3]　$\mathfrak{P}(\aleph_1)$

[証明]　任意の空間 X_1, Y_1 を考える。順序数 α に対して次のように $\mathcal{B}^\alpha$ を帰納的に定義する。

$$\mathcal{B}^0[X_1, Y_1] = \mathcal{S}[X_1, Y_1]$$

$$\mathcal{B}^{\alpha+1}[X_1, Y_1] = \{D - C \mid D, C \in \mathcal{B}^\alpha[X_1, Y_1]\} \cup \{\bigcup_{n \in \omega} D_n \mid D_n \in \mathcal{B}^\alpha[X_1, Y_1]\}。(\omega = \{0, 1, \cdots\})$$

$$\mathcal{B}^\alpha[X_1, Y_1] = \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{B}^\beta[X_1, Y_1]$$ (α が limit ordinal のとき)。

すると　$\mathcal{B}[X_1, Y_1] = \bigcup_{\alpha \in \aleph_1} \mathcal{B}^\alpha[X_1, Y_1] = \mathcal{B}^{\aleph_1}[X_1, Y_1]$ である。
次に Lem. を 3つ作っておく：

［Lem 1］ 任意の空間 X_1, X_2, Y_1, Y_2 を考える。 $f: X_1 \to X_2$, $g: Y_1 \to Y_2$ を関数（といっただけでは on とも onto ともわからない）とする。もしも $C \in \mathcal{B}[X_2, Y_2]$ ならば　$(f \times g)^{-1}(C) \in \mathcal{B}[X_1, Y_1]$。

［証明］（超限帰納法） $C \in \mathcal{B}^0[X_2, Y_2]$ のとき，$C = E \times F$, $E \subset X_2$, $F \subset Y_2$。 $\therefore (f \times g)^{-1}(C) = f^{-1}(E) \times g^{-1}(F) \in \mathcal{B}^0[X_1, Y_1]$。

一般に逆像について次のことは明かに成立つ：

$$(f \times g)^{-1}(D - C) = (f \times g)^{-1}(D) - (f \times g)^{-1}(C)$$

$$(f \times g)^{-1}\left(\bigcup_{n \in \omega} D_n\right) = \bigcup_{n \in \omega} (f \times g)^{-1}(D_n)。$$

このことから

$$C \in \mathcal{B}^\alpha[X_2, Y_2] \Rightarrow (f \times g)^{-1}(C) \in \mathcal{B}^\alpha[X_1, Y_1]$$

となる。これで帰納法が完成する。

［Lem. 2］ 任意の集合 X_1, Y_1 を考える。$f: X_1 \to Y_1$ を関数とする。$\overline{\overline{X_1}} \leq 2^{\aleph_0}$ とする。f^* を f のグラフとする：

$$f^* = \{\langle a, b \rangle \mid f(a) = b\}。$$

すると　$f^* \in \mathcal{B}[X_1, Y_1]$。

［証明］ $[0,1]$ の部分集合と X_1 とが1対1に対応する。この対応を ψ と書く。関数 g, h を次のように定義する；

$$g(x) = \psi(f(x))$$
$$h(y) = \psi(y) \qquad y \in f(X_1).$$

すなわち，h は ψ を $f(X_1)$ に制限したもの。なお，g の定義域 = f の定義域とする。すると

$$\langle x, y\rangle \in f^* \Leftrightarrow (g \times h)\langle x, y\rangle \in C$$

たゞし $C = \{\langle a, a\rangle \mid a \in [0,1] \wedge a \in \psi(f(X_1))\}$。なぜなら，$\langle x, y\rangle \in f^* \Rightarrow (f(x) = y \wedge x \in X_1 \wedge y \in Y_1) \Rightarrow (g(x) = \psi(f(x)) \wedge h(y) = \psi(y) = \psi(f(x)))$。また逆に $(g \times h)\langle x, y\rangle \in C \Rightarrow g(x) = h(y) \Rightarrow \psi(f(x)) = \psi(y) \Rightarrow f(x) = y \Rightarrow \langle x, y\rangle \in f^*$。

ゆえに $f^* = (g \times h)^{-1}(C)$。

一方，

$$C = \{\langle a, a\rangle \mid a \in [0,1]\} \cap \{\psi(f(X_1)) \times \psi(f(X_1))\}$$
$$\in \mathcal{B}[[0,1], [0,1]].$$

$\therefore$ Lem. 1. により，$f^* \in \mathcal{B}[X_1, Y_1]$。

［Lem. 3］ $\overline{\overline{X}} = \aleph_1$ とすると，$X \times X$ は可算個のグラフの和として書ける。

［証明］ $X = \{x_0, x_1, \cdots, x_\nu, \cdots\}$ $(\nu < \aleph_1)$ と整

列する。 $X \times X = C \cup D$, $C \cap D = \phi$ となるよう，次のようにC, Dを定義する。

$X \times X \ni \langle y, z \rangle$ とすると，$\exists \nu ; y = x_\nu$, $\exists \mu ; z = x_\mu$ となる。このことを用いて

$$C = \{ \langle y, z \rangle \mid y = x_\nu,\ z = x_\mu,\ \nu \leq \mu \}$$

とする。$D = (X \times X) - C$ とする。

$X \ni z$ を固定する。そして

$$C_z = \{ y \mid \langle y, z \rangle \in C \}$$

とおく。$z = x_\mu$ $(\mu < \aleph_1)$ と書けるから，

$$C_z = \{ x_\nu \mid \nu \leq \mu \}$$

となる。ゆえに $\overline{\overline{C_z}} \leq \aleph_0$。つまり高々可算個だから，

$$C_z = \{ c_1^z,\ c_2^z,\ \cdots,\ c_n^z,\ \cdots \}$$

と書ける。

そこで，次のように関数 $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$ を定義する。

$$f_n(z) = \begin{cases} c_n^z & (c_n^z \in C_z) \\ \text{なし} & (c_n^z \notin C_z) \end{cases}$$

（C_z が有限集合のときは，c_n^z は途中でなくなってしまうのである）。いま $\langle y, z \rangle \in C$ とすると $y \in C_z$。ゆえに $y = c_n^z$ と書ける。したがって $f_n(z) = y$。

$$\therefore \langle z, y \rangle \in f_n^* \ (f_n \text{のグラフ}).$$

すなわち

$$\{\langle z, y\rangle \mid \langle y, z\rangle \in C\} = \bigcup_{n\in\omega} f_n^*$$

この集合は対角線に関して C と対称だから，Cも可算個のグラフの和になる。

Dについても，ほぼ同様である。

（以下定理自身の証明） $X\times X \supset E$ とすると，$E = (E\cap C) \cup (E\cap D)$。関数 f_n' を次のように定義する。

$$f_n'(z) = \begin{cases} f_n(z) & \langle f_n(z), z\rangle \in E\cap C \\ \text{なし.} & \langle f_n(z), z\rangle \notin E\cap C \end{cases}$$

$\langle f_n(z), z\rangle \in C_z$ であるが，これがさらにEにも入っているときだけ，$f_n'(z)$ を定義するのである。すると

$$(E\cap C)' = \{\langle z, y\rangle \mid \langle y, z\rangle \in E\cap C\} = \bigcup_{n\in\omega}(f_n'^*)$$

f_n' は Lem 2 の f の条件をみたしているから，$f_n'^* \in \mathcal{B}[X, X]$。∴ $E\cap C \in \mathcal{B}[X, X]$。

同様に $E\cap D \in \mathcal{B}[X, X]$。

（定理3．終り）

［注意］㋑ Cons$(2^{\aleph_0} = \aleph_2 \wedge \neg \underline{P}(\aleph_2)$, ZF + AC$)$

Cons$(2^{\aleph_0} = \aleph_2 \wedge \underline{P}(\aleph_2)$, ZF + AC$)$，どちらも示されている。

㋺ 定理3 から，CH $\longrightarrow \underline{P}(2^{\aleph_0})$。

（なお Cons（ZF＋AC，$2^{\aleph_0}=\aleph_1$），Cons（ZF＋AC，$2^{\aleph_0}>\aleph_1$） は Cohen（'63）によって示されている）。

参考書：竹内外史「現代集合論入門」（'71。日本評論社）

（以上文責　森本治樹）

・§記録者註：共同研究の際に難波氏に話していただいた内容の一部に，他の機会に教えていただいたことを加えて，まとめたものである。§3.［定理2］の証明は，高橋敬博氏（阪大教養）によるもので，同氏と難波氏の御了解を得て，ここに入れさせていただいた。この原稿のうち§2. は鈴木武氏（大阪市大理）に整理していただいて，森本が文章に書下した。この原稿の完成に手間どったのは，私の責任で，そのためこの講究録の発刊が遅れたことを，深くお詫びする。

（森本治樹）